Θδο $\ell^p(\mathbb{N})$ είναι διαχωρίσιμος

Θεωρούμε $E=\{e_1, e_2, \dots\}$ με $e_i = (0,\dots,0,\overset{i\text{-θέση}}{1},0,\dots,0)$

$E \subset \ell^p(\mathbb{N})$. Αρκεί νδο $\overline{Span(E)} = \ell^p(\mathbb{N})$

Εστω $x \in \ell^p(\mathbb{N})$ και θέτουμε $y_i = x(1)e_1 + \dots + x(i)e_i$

οπου $y_i \in Span(E)$

$$\|y_i - x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_i(n) - x(n)|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{n=i+1}^{\infty} |\cancel{y_i(n)} - x(n)|^p\right)^{1/p} =$$

$$= \left(\sum_{n=i+1}^{\infty} |x(n)|^p\right)^{1/p} \xrightarrow{i \to \infty} 0$$ δίοτι η σειρά αυτή συγκλίνει

Αρα, $x \in \overline{Span(E)} \Rightarrow \ell^p(\mathbb{N})$ διαχωρίσιμος

Παραδείγματα χώρων με νόρμα που δεν είναι χώροι Banach:

Ενας τέτοιο παράδειγμα αποτελεί οποιοσδήποτε υπόχωρος χώρου Banach που δεν είναι κλειστός. Ειδικότερα κάθε γνήσιος πυκνός υπόχωρος ενός χώρου Banach.

1) $C_{00}(\mathbb{N}) = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n = 0, \forall n \geq n_0\}$

ο χώρος των τελικά μηδενικών ακολουθιών είναι διανυσματικός χώρος και μάλιστα:

$C_{00}(\mathbb{N}) \subsetneq \ell^p(\mathbb{N}) \leq C_0(\mathbb{N})$, $1 \leq p < \infty$

Αφου, $x_n = \frac{1}{n^{2/p}}$, $n \in \mathbb{N}$ $\in \ell^p(\mathbb{N})$ και $x_n \notin C_{00}(\mathbb{N})$

εστε $C_{00}(\mathbb{N})$ γνήσιος υποχωρος του $\ell^p(\mathbb{N})$

Αφου, $y_n = \frac{1}{n^{1/p}}$, $n \in \mathbb{N}$ $\in C_0(\mathbb{N})$ και $y_n \notin \ell^p(\mathbb{N})$

εστε $\ell^p(\mathbb{N})$ είναι γνησιος υποχωρος του $C_0(\mathbb{N})$

Επίσης, $C_{00}(\mathbb{N}) = Span(E)$, οπου $E = \{e_1, e_2, \dots\}$

Ετσι, $C_{00}(\mathbb{N})$ πυκνος (γνήσιος) υπόχωρος του $(\ell^p(\mathbb{N}), \|\cdot\|_p)$ και άρα $(C_{00}(\mathbb{N}), \|\cdot\|_p)$ όχι χωρος Banach.

Επίσης, $c_{00}(\mathbb{N})$ πυκνός (γνήσιος) υπόχωρος του $(c_0(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$, άρα ο $(c_{00}(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ όχι χώρος Banach

Επιπλέον, ο $\ell^p(\mathbb{N})$ είναι πυκνός (γνήσιος) υπόχωρος του $(c_0(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ (αφού $\overline{c_{00}(\mathbb{N})} = c_0(\mathbb{N})$ και $c_{00}(\mathbb{N}) \subsetneq \ell^p(\mathbb{N})$), άρα $(\ell^p(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ όχι χώρος Banach

Ορισμός: Έστωσαν X, Y δύο γραμμικοί χώροι
Μια απεικόνιση $T: X \to Y$ λέγεται γραμμική εάν
$T(x+y) = T(x) + T(y)$ και $T(\lambda x) = \lambda T(x)$, $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Επίσης, η γραμμική απεικόνιση λέγεται και γραμμικός τελεστής

Υπενθυμίσεις (Γραμμική Άλγεβρα)

Έστω X γραμμικός χώρος.
Αν $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο το οποίο είναι υποσύνολο λέγεται γραμμικά ανεξάρτητο αν $\forall \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$: αν $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$ τότε $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$

Αν $A \subset X$ (όχι απαραίτητα πεπερασμένο) θα λέγεται γραμμικά ανεξάρτητο όταν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του A είναι γραμμικά ανεξάρτητο. δηλαδή αν $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x_1, \ldots, x_n \in A$ διαφορετικά ανά δύο και $\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$: αν $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$ τότε $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$

Ορισμός: Αν X γραμμικός χώρος, ένα $B \subset X$ λέγεται αλγεβρική βάση του X ή Hamel βάση του X αν
i) B γραμμικά ανεξάρτητο
ii) Η γραμμική θήκη του B να είναι ίση με X
($Span(B) = X$)

Πρόταση:
$B \subset X$ είναι αλγεβρική βάση του X αν.ν είναι μεγιστικό γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο του X
↓ δηλαδή
αν G γραμ. ανεξάρτητο $\subseteq X$ με $B \subset G \Rightarrow B = G$

Πχ
Το σύνολο $E = \{e_1, e_2, \dots\}$ στον $C_{00}(\mathbb{N})$
είναι μία βάση Hamel αυτού.

ΛΗΜΜΑ (Zorn)
Έστω $(E, \preceq)$ ένας μερικά διατεταγμένος χώρος ώστε κάθε ολικά διατεταγμένο $\subseteq E$ (ή αλυσίδα) έχει άνω φράγμα στο E, τότε το E έχει μεγιστικά στοιχεία (ή ψευδομέγιστα)

Θεώρημα
Κάθε διανυσματικός χώρος έχει Hamel βάση
Απόδειξη
Έστω X δ.χ και θεωρούμε το σύνολο
$E = \{B \subset X : B \text{ γραμ. ανεξ.}\}$
με την εξής σχέση διάταξης:
$B_1 \leq B_2 \Leftrightarrow B_1 \subset B_2$
Άρα, $(E, \leq)$ μερικά διατεταγμένος χώρος
Αν $\{B_i, i \in I\}$ αλυσίδα στο E (δηλ. $\forall i, j \in I$

$B_i \subset B_j$ ή $B_j \subset B_i$) τοτε αν θεσουμε $B = \bigcup_{i \in I} B_i$ αποδεικνύεται οτι B γραμ. ανεξ. υποσύνολο και Προφανώς $B_i \subset B$, $\forall i \in I \Rightarrow$ Δηλαδή, B ανω φραγμα της $\{B_i : i \in I\}$ αλυσίδας.

Απο Λήμμα (Zorn) το $(\mathcal{E}, \preceq)$ εχει μεγιστικα στοιχεια. Αν B μεγιστικο στοιχειο του $\mathcal{E}$ τοτε B αλγεβρική βαση του X αφου εξ ορισμου είναι γραμ. ανεξ και επισης $\underline{Span(B) = X}$

<u>Αποδ</u>

Εστω $Span(B) \neq X$ τοτε $\exists x \in X \setminus Span(B)$, ομως $B \cup \{x\}$ γραμμικά ανεξαρτ. (Σ) διοτι $B \subsetneq B \cup \{x\}$ και B μεγιστικο στοιχειο του $\mathcal{E}$

Αποδεικνύεται ότι αν B_1, B_2 αλγεβρικές βάσεις του ιδίου χωρου X, τα σύνολα B_1, B_2 είναι ισοπληθικά δηλ. $\exists \varphi : B_1 \to B_2$ 1-1 και επί

<u>Ορισμος</u>: Διάσταση του δ.χ X ονομάζεται η πληθικότητα μίας αλγεβρικής του βασης (η οποία είναι καλά ορισμένη)

<u>Προταση</u>

α) Εάν X, Y γραμ. χώροι και $B = \{x_i : i \in I\} \subset X$ γραμ. ανεξάρτητο και $y_i \in Y$, $\forall i \in I$ τοτε $\exists\, T : X \to Y$ γραμμική με $T(x_i) = y_i$, $\forall i \in I$

<u>Αποδ</u>

B βάση του X αν $x \in X_i$, $x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ οπου $\{i \in I : \lambda_i \neq 0\}$ πεπερ.

Θετουμε $T(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i y_i$, β) Κάθε απειροδιάστατος γραμμικός χώρος X είναι αλγεβρικά ισόμορφος με ένα χώρο της μορφής $Y = \{x : I \to \mathbb{R} \;\; \{i \in I : x(i) \neq 0\}$ πεπερ.$\}$ με πράξεις κατά σημείο

Αποδ

Έστω $\{e_i, i \in I\}$ αλγεβρική βάση του X

Τότε I άπειρο

$T : Y \to X$, $T(x) = \sum_{i \in I} x(i) e_i$ είναι γραμμική 1-1 & επί

Πρόταση:

Έστω X, Y χώροι με νόρμα $X \neq \{0\}$ και $T : X \to Y$ γραμμ. τελεστής

τότε

$$\sup\left\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|}, x \in X, x \neq 0\right\} = \sup\{\|T(x)\|, \|x\| = 1\}$$

$$= \sup\{\|T(x)\|, x \in X, \|x\| \leq 1\}$$

Αποδ.

Έστω $\sup\left\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|}, x \in X, x \neq 0\right\} = \alpha$

και

$$\sup\{\|T(x)\| ; \|x\| = 1\} = \beta$$

και

$$\sup\{\|T(x)\|, x \in X, \|x\| \leq 1\} = \gamma$$

1) Θδο $\alpha \leq \beta$

$\forall x \in X, x \neq 0$ $\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \left\|T\left(\frac{1}{\|x\|} x\right)\right\| \leq \beta$ διότι $\left\|\frac{1}{\|x\|} x\right\| = \frac{1}{\|x\|} \cdot \|x\| = 1$.

2) Θδο $\beta \leq \gamma$ (προφανές)

3) Θδο $\gamma \leq \alpha$

$\forall x \in X$, $\|x\| \leq 1$

Αν $x = 0 \Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow \|Tx\| = 0 \leq \alpha$

Αν $x \neq 0$ $\quad \|Tx\| \leq \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq a$

Ορισμός

Έστω $T: X \to Y$ γραμμ. τελεστής μεταξύ χώρων με νόρμα, ο τελεστής T λέγεται φραγμένος αν $\exists M \in \mathbb{R}\ (M \geq 0)$: $\|T(x)\| \leq M\|x\|$, $\forall x \in X$

Από την προηγούμενη πρόταση
T φραγμένο $\Leftrightarrow$ $a = b = \gamma$ πεπερασμένο

Αν T φραγμένος θέτουμε
$\|T\| = \sup\{\|T(x)\|,\ x \in X,\ \|x\| \leq 1\}$
(που συμπίπτει με τα a, b, γ που ορίσαμε)
Ο αριθμός $\|T\|$ λέγεται νόρμα του τελεστή T και ισχύει $0 \leq \|T\| < \infty$.
Καταλήγουμε $\|T\| = \min\{M \in \mathbb{R} : \|T(x)\| \leq M\|x\|,\ \forall x \in X\}$
(διότι $\|T\| = a$)
Άρα, $\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$, $\forall x \in X$

Πρόταση

Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T: X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα
i) T φραγμένος
ii) T ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz) προφανές
iii) T ομοιόμορφα συνεχής) προφανές
iv) T συνεχής) προφανές
v) T συνεχής σε ένα σημείο

Απόδ.

i) $\Rightarrow$ ii) T φραγμένος $\Rightarrow$ $\|T(x) - T(y)\| = \|T(x-y)\| \leq$
$\leq \|T\| \cdot \|x-y\|$

v) $\Rightarrow$ i) Έστω $x_0 \in X$ ώστε T συνεχής στο x_0

Επομένως, $\exists \delta>0$, $\forall x \in X$: $|x-x_0|<\delta \Rightarrow$
$\Rightarrow \|T(x)-T(x_0)\|<1$
Για καθε $x \in X$: $\|x\| \leq 1$
Τότε $\|(x_0+\frac{\delta}{2}x)-x_0\| = \frac{\delta}{2}\|x\| \leq \frac{\delta}{2}<\delta$
Τότε $\|T(x_0+\frac{\delta}{2}x)-T(x_0)\|<1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \|\frac{\delta}{2}T(x)\|<1 \Rightarrow \|T(x)\|<\frac{2}{\delta} \Rightarrow$
$\Rightarrow T$ φραγμένος.

Ορισμός

Εστω X, Y χώροι με νόρμα
Ενας γραμμικός τελεστής $T: X \to Y$ 1-1, επι, ώστε T και T^{-1} συνεχείς λέγεται ισομορφισμός των χώρων X, Y.
Τοτε οι χωροι X και Y είναι ισομορφοι ή ισομορφικοι $(X \sim Y)$

Ορισμός

Εαν X, Y χωροι με νόρμα και $T: X \to Y$ γραμ. τελεστης τοτε T λεγεται ισομετρικος ισομορφισμός αν T επι και $\|T(x)\|=\|x\|$, $x \in X$
Τοτε οι χωροι X και Y είναι ισομετρικα ισομορφοι

Προταση

Εστω X, Y χωροι με νόρμα και $T: X \xrightarrow{\text{επι}} Y$ ενας γραμ. τελεστής τοτε T ισομορφισμός αν.ν $\exists\, m, M > 0$ ωστε $m \cdot \|x\| \leq \|T(x)\| \leq M \cdot \|x\|$, $\forall x \in X$

Αποδ.

$(\Rightarrow)$ T, T^{-1} φραγμενοι $\to \exists\, m_1, M$ ωστε
$\|T(x)\| \leq M \cdot \|x\|$, $x \in X$ και $\|T^{-1}(y)\| \leq m_1 \cdot \|y\|$
Εστω $y = T(x)$ τοτε $\|T^{-1}(T(x))\| \leq m_1 \cdot \|T(x)\| \to$

$$\to \|x\| \le m_1 \cdot \|T(x)\| \Rightarrow \|T(x)\| \ge \overset{m}{\overset{\|}{\left(\frac{1}{m_1}\right)}} \cdot \|x\|, \ \forall x \in X$$

($\Leftarrow$) Έστω $m\|x\| \le \|T(x)\| \le M \cdot \|x\|$

T φραγμένη $\Leftrightarrow$ T συνεχής

Από την $m\|x\| \le \|T(x)\|$, $x \in X \Rightarrow T$ 1-1

Αλλά T είναι επί

Άρα, ορίζεται T^{-1}

Έστω λοιπόν $y \in Y$ τότε $\exists x \in X : x = T^{-1}(y)$

Τότε

$m \cdot \|T^{-1}(y)\| \le \|y\| \Rightarrow \|T^{-1}(y)\| \le \frac{1}{m}\|y\|$, $\forall y \in T$

Άρα, T^{-1} φραγμένη $\Rightarrow T^{-1}$ συνεχής

Πόρισμα

Έστω γραμμικός χώρος X και οι νόρμες $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ στον X. Τότε,

i) $(X, \|\cdot\|) \sim (X, \|\cdot\|') \Leftrightarrow \exists m, M > 0$ ώστε $m \cdot \|x\| \le \|x\|' \le M \cdot \|x\|$

ii) Αν $(X, \|\cdot\|) \sim (X, \|\cdot\|')$ (ή $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$) τότε αν ο ένας είναι χώρος Banach τότε και ο άλλος είναι χώρος Banach.

(Αντίστοιχη πρόταση δεν ισχύει για μετρικούς)

Απόδειξη

i) $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|' \Leftrightarrow$ ταυτοτικός τελεστής

$I : (X, \|\cdot\|) \to (X, \|\cdot\|')$ με $T(x) = x$ ισομορφισμός

αν.ν $\exists m, M > 0 : m\|x\| \le \|x\|' \le M\|x\|$.

ii) Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ βασική στον $(X, \|\cdot\|')$

Από την 1η ανισότητα η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ βασική στον

$(X, \|\cdot\|)$

Εφόσον $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach $\rightarrow$

$\rightarrow \exists\, x \in X$ ώστε $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x \Leftrightarrow \|x_n - x\| \rightarrow 0$

$\rightarrow \|x_n - x\|' \leq M \cdot \|x_n - x\| \Rightarrow x_n \xrightarrow{\|\cdot\|'} x$

Άρα, $(X, \|\cdot\|')$ χώρος Banach

Ορισμός

Έστω X, Y χώροι με νόρμα

Θέτουμε $\mathcal{B}(X,Y) = \{T : X \to Y$, T φραγμ. γραμ. τελ

ο οποίος είναι γραμμικός χώρος με πράξεις κατ

σημείο, και η συνάρτηση $\|\cdot\| : \mathcal{B}(X,Y) \to \mathbb{R}$

και $T \longmapsto \|T\|$ λέγεται νόρμα του τελεστή

Το ότι είναι νόρμα αποδεικνύεται:

εύκολα δείχνονται

i) $\|T(x)\| > 0$ και αν $\|T(x)\| = 0 \Leftrightarrow T(x) = 0$

ii) $\|\lambda T(x)\| = |\lambda| \cdot \|T(x)\| \leq |\lambda|\, \|T\| \cdot \|x\|$

iii) Αν $S, T \in \mathcal{B}(X,Y)$ γραμ. τελεστές

$\|(T+S)(x)\| = \|T(x) + S(x)\| \leq \|T(x)\| + \|S(x)\| =$

$= \|T\| \cdot \|x\| + \|S\|\, \|x\| = (\|T\| + \|S\|)\, \|x\|$

Άρα, $T + S \in \mathcal{B}(X,Y)$ με $\|T+S\| \leq \|T\| + \|S\|$

Ορισμός

Συμβολίζουμε με X^* όλους τους φραγμένους τελεστές του $\mathbb{R}$. Δηλαδή, $X^* = \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$

δυϊκός ή συζυγής του X.

X^{**}: δεύτερος δυϊκός του X, δηλαδή

$X^{**} = \mathcal{B}(X^*, \mathbb{R})$

Τα στοιχεία του X^* λέγονται γραμμικά συναρτησοειδή του X και συμβολίζονται x^*, y^* ή $f, g \ldots$

Πρόταση

Έστω X, Y χώροι με νόρμα

i) Αν Y χώρος Banach τότε $\mathcal{B}(X,Y)$ χώρος Banach.

ii) Οι $X^*, X^{**}, \dots$ είναι χώροι Banach.

Απόδ.

ii) Η απόδειξη είναι αποτέλεσμα του (i) αφού $X^* = \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ και $\mathbb{R}$ πλήρης

i) Έστω βασική ακολουθία (T_ν) στον $\mathcal{B}(X,Y)$

$\forall x \in X : \|T_n(x) - T_m(x)\| = \|(T_n - T_m)(x)\| \leq$
$\leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\|$

όμως, (T_n) βασική ακολουθία τότε $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία

όμως, Y χώρος Banach $\Rightarrow (T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα.

Άρα, ορίζουμε $T : X \to Y$ με $T(x) = \lim\limits_n T_n(x)$

Αρκεί λοιπόν νδο $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ και $\|T_n - T\| \to 0$

T γραμμικός ως το κατά σημείο όριο γραμμικών

Έστω τυχαίο $\varepsilon > 0$

τότε αφού $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασική τότε

$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0 \to \|T_n - T_m\| < \frac{\varepsilon}{2}$

και $\forall x \in X : \|x\| \leq 1$ τότε

$\|T_n(x) - T_m(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\quad$ $\|\cdot\|$ συνεχής $\Rightarrow$ το όριο μπαίνει μέσα

Έτσι, για $m \to \infty$ τότε $\|T_n(x) - T(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}$

Συνεπώς, $n = n_0$ προκύπτει

$T_{n_0} - T \in \mathcal{B}(X,Y)$, άρα ο T ως διαφορά δυο φραγμένων τελεστών είναι φραγμένος τελεστής και άρα $T = T_{n_0} - (T_{n_0} - T) \in \mathcal{B}(X,Y)$

Άρα, $\|T_n - T\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T$

Παράδειγμα

$T: C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$T(f) = \int_a^b f(t)\,dt$$

Νδο T φραγμένος γραμμ. τελεστής και να υπολογίσετε $\|T\| = ;$

ΛΥΣΗ

T γραμμικός απο τη γραμμικότητα του ολοκληρωμ.

$\forall f \in C[a,\beta]$:

$|T(f)| = \left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \leq (b-a)\,|f(t)| \rightarrow$

$\rightarrow |T(f)| \leq (b-a) \cdot \|f\|_\infty \rightarrow$

$\rightarrow$ T φραγμένος τελεστής με

$\|T\| \leq b-a.$

Απο την άλλη, για τη σταθερή συνάρτηση

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ με $f(t) = 1 \quad \forall t \in [a,b]$

Αρα, $\|T\| \geq \dfrac{|T(f)|}{\underbrace{\|f\|_\infty}_{1}} = b-a$

Ασκηση

$S: C[a,b] \to \mathbb{R}$ τύπου

$S(f) = f(a) + f(b)$

να δείξετε οτι S φραγμένος γραμμικός τελεστής και να υπολογίσετε $\|S\| = ;$